

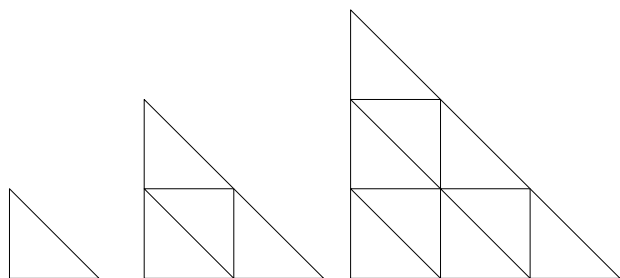
دنباله‌ی اعداد و مفهوم آن

۱- با توجه به تغییرات شکل زیر در هر مرحله:

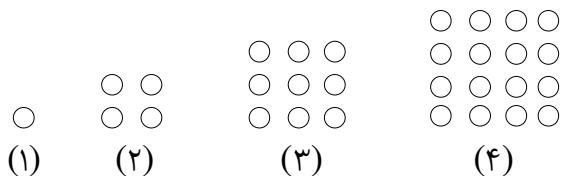
الف) جدولی تشکیل دهید که تعداد مثلث‌های کوچک در هر شکل را بتوان تا شکل شماره‌ی ۵ از روی آن پیدا کرد.

ب) رابطه‌ی بین شماره‌ی هر شکل و تعداد مثلث‌های کوچک در همان شکل را حدس بزنید.

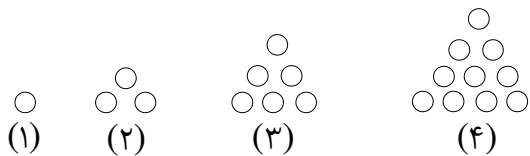
پ) آیا می‌توانید تعداد مثلث‌های شکل ۲۰ را بگویید؟ شکل n را چه طور؟



* ۲- با توجه به تغییرات شکل زیر می‌توانید بگویید جمله‌ی n ام دارای چند مهره‌ی سفید است؟



۳- الگوی اصلی دنباله‌ی زیر را به دست آورید.



۴- پنج جمله‌ی اول هر یک از دنباله‌های زیر که جمله‌ی عمومی آن داده شده است را به دست آورید.

الف) $\frac{n^2}{n+1}$

ب) $n^2 - 6n + 1$

پ) $3n - 5$

۵- چهار جمله‌ی اول هر یک از دنباله‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\frac{3n^2}{2^n}$

ب) $\left(\frac{1}{3n}\right)^n$

پ) $\frac{n^3}{2n^2 - 5}$

* ۶- چهار جمله‌ی اول هر یک از دنباله‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$

ب) $\frac{5n}{3n-1}$

پ) $\frac{1}{n} - 3n^2$

۷- دنباله‌های زیر را تا هفت جمله ادامه داده و الگوی آن را به دست آورید.

الف) ۲, ۴, ۶, ۸, ...

ب) ۱, ۳, ۵, ۷, ...

پ) ۳, ۹, ۲۷, ۸۱, ...

۸- الگوی دنباله‌های زیر را به دست آورید.

الف) ۵, ۱۷, ۲۹, ۴۱, ...

ب) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$

پ) $\frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{9}{7}, \frac{16}{9}, \dots$

* ۹- الگوی دنباله‌های زیر را بیابید.

الف) $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \dots$

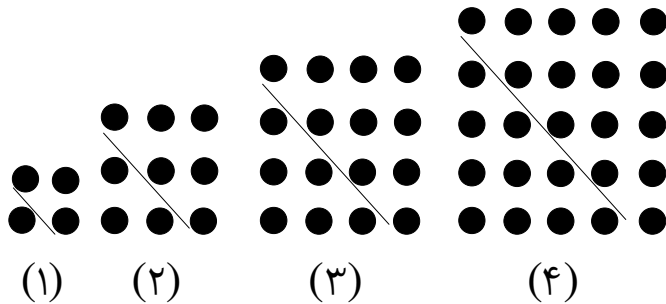
ب) $\frac{7}{4}, \frac{10}{16}, \frac{13}{64}, \frac{16}{256}, \dots$

پ) $1, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \dots$

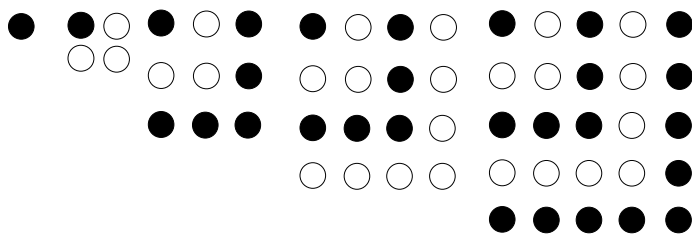
ت) $9, 99, 999, \dots$

۱۰- یک شرکت سرمایه‌گذاری هر سال نصف پولی را که به عنوان سرمایه دریافت کرده به عنوان سود به صاحب سرمایه باز می‌گرداند. فردی مبلغ $8,000,000$ تومان در این شرکت سرمایه‌گذاری می‌کند و در انتهای سال نصف سود را خرج و مابقی را دوباره در اختیار شرکت می‌گذارد. اگر وی هر سال این کار را تکرار کند در آخر سال سوم چقدر سرمایه خواهد داشت؟

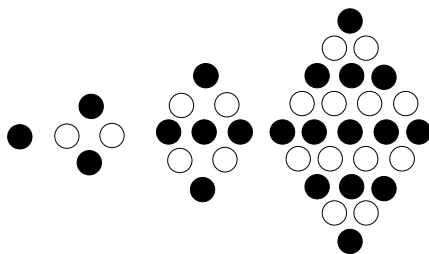
* ۱۱- با توجه به شکل‌های زیر تعداد دایره‌های زیر خط از چه الگویی پیروی می‌کند؟
تعیین کنید در شکل n ام چند دایره زیر خط وجود دارد.



* ۱۲- با توجه به شکل‌های زیر تعداد دایره‌های توپُر از چه الگویی پیروی می‌کنند؟



۱۳- در آرایه لوزی مقابل تعداد صفرهای توپُر، در جمله‌ی یازدهم کدام است؟ (سراسری انسانی ۸۸)



۱۴- جمله‌ی عمومی دنباله‌ای به صورت $a_n = \frac{n^2 - 5n + 1}{3n + 2}$ است. چندمین جمله‌ی آن $\frac{1}{17}$ است؟

۱۵- اگر در دنباله‌ای، هر جمله حاصل مجموع دو جمله‌ی قبلی خود باشد و جملات اول و دوم برابر یک باشند، سایر جملات دنباله را بنویسید.

دنباله‌ی حسابی

۱۶- اگر دو جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی از چپ به راست ۱۲ و ۶- باشد، چهار جمله‌ی بعدی این دنباله را بنویسید.

۱۷- ابتدا بررسی کنید آیا هر یک از دنباله‌های زیر حسابی هستند یا خیر. سپس الگوی هر دنباله را بیابید.

الف) $\frac{۸}{۵}, \frac{۱۶}{۵}, \frac{۲۴}{۵}, \frac{۳۲}{۵}, \dots$

ب) $\frac{\sqrt{۷}}{۲}, ۰, -\frac{\sqrt{۷}}{۲}, -\sqrt{۷}, \dots$

پ) ۲, ۴, ۶, ۸, ...

ت) $\sqrt{۳}, ۲\sqrt{۳}, ۴\sqrt{۳}, ۵\sqrt{۳}, \dots$

* ۱۸- اگر قانون یک دنباله‌ی حسابی $a_n = 3n + 2$ باشد. قدر نسبت دنباله را بیابید.

۱۹- طبق دنباله‌ی زیر، چندمین جمله ۴۷ خواهد بود؟

۵, ۸, ۱۱, ۱۴, ...

۲۰- جمله‌ی سوم و هفتم یک دنباله حسابی به ترتیب ۷, ۱۵ می‌باشد. جمله‌ی پنجم این دنباله را به دست آورید.

۱۷, X, ۴۱, ...

* ۲۱- در دنباله‌ی حسابی روبه‌رو X را بیابید.

$\frac{۷}{۲}, X, \frac{۱۳}{۲}, Y, \dots$

۲۲- در دنباله‌ی حسابی روبه‌رو Y را بیابید.

۲۳- در دنباله‌ی روبه‌رو به جای X کدام عدد باید قرار گیرد تا دنباله‌ی حسابی شود؟ $3X - 7, 5X + 7, 13X + 3, \dots$

۱۱, ۱۵, ۱۹, ..., $8p + 7$

* ۲۴- دنباله‌ی حسابی روبه‌رو چند جمله دارد؟ (بر حسب p)

۲۵- بین ۱۳- و ۱۱ پنج جمله چنان درج کنید که یک دنباله‌ی حسابی تشکیل شود.

۲۶- اگر جمله‌ی چهارم یک دنباله‌ی حسابی ۳۳ و جمله‌ی نهم آن ۵۸ باشد، جمله‌ی عمومی دنباله را به دست آورید؟

* ۲۷- برای درج ۷ واسطه‌ی حسابی بین اعداد ۴ و ۴۰، قدر نسبت چه عددی باید باشد؟

۲۸- اگر به قدر نسبت یک دنباله‌ی حسابی ۳ واحد اضافه کنیم، به جمله‌ی ششم دنباله چند واحد اضافه می‌شود؟

۲۹- اگر تمام جملات یک دنباله‌ی حسابی را در ۳ ضرب کنیم، قدر نسبت چه تغییری می‌کند؟

* ۳۰- اگر تمام جملات یک دنباله‌ی حسابی را به توان ۲ برسانیم، آیا دنباله‌ی جدید یک دنباله‌ی حسابی خواهد بود؟ (راهنمایی: یک تصاعد عددی نوشته و جملات آن را به توان ۲ برسانید.)

۳۱- علی هفته‌ای ۱۰ ساعت مطالعه می‌کند. پدرش به او قول داده اگر هر هفته ۲ ساعت به ساعت مطالعه‌ی خود اضافه کند و زمان مطالعه‌ی او به ۳۰ ساعت در هفته برسد، برای او یک دوچرخه می‌خرد. علی تصمیم گرفته زمان رسیدن به دوچرخه را به دست آورد. این زمان چند هفته است؟

۳۲- جمعیت یک روستا ۵۰۰ نفر است. هر سال ۱۰۰ نفر از روستا به شهر مهاجرت کرده و ۲۵ نفر نیز در روستا به دنیا می‌آیند. بعد از ۵ سال جمعیت این روستا چند نفر خواهد بود؟

- * ۳۳- یک شرکت تولیدی تا پایان سال اول ۸۰۰ واحد کالا تولید می‌کند و پس از گذشت هر سال ۱۲۰ کالا به تولید سال قبل می‌افزاید. بعد از گذشت ۵ سال جمعاً چند واحد کالا می‌تواند تولید کند؟
- * ۳۴- اگر زاویه‌های مثلثی تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند و کوچک‌ترین زاویه در این مثلث ۳۰ درجه باشد، نوع مثلث را مشخص کنید.
- * ۳۵- اضلاع یک مثلث قائم الزاویه تشکیل یک دنباله‌ی حسابی می‌دهند. اگر طول وتر این مثلث ۱۰ باشد، طول دو ضلع دیگر چقدر خواهد بود؟
- * ۳۶- مجموع زوایای یک شش ضلعی ۷۲۰ درجه است و اندازه‌ی زاویه‌ها یک دنباله‌ی حسابی تشکیل می‌دهند. اگر کوچک‌ترین زاویه ۱۰۰ درجه باشد، اندازه‌ی زوایای دیگر را به دست آورید.
- * ۳۷- در یک دنباله‌ی حسابی بین جملات m, p, n, q داریم:

$$a_m + a_n = a_p + a_q$$
 ثابت کنید که: $m + n = p + q$
- * ۳۸- مجموع سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی حسابی صفر و مجموع مربعات آن‌ها ۱۸ است. جمله‌های دنباله را مشخص کنید.
- * ۳۹- اگر جمله‌ی n ام یک دنباله‌ی حسابی برابر عدد m و جمله‌ی m ام دنباله عددی برابر n باشد، قدر نسبت دنباله را بیابید.

دنباله‌ی هندسی

- * ۴۰- اگر دو جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی ۶- و ۸ باشند، سه جمله‌ی بعدی این دنباله را به دست آورید.
- * ۴۱- ابتدا بررسی کنید آیا هر یک از دنباله‌های زیر هندسی هستند یا خیر. سپس الگوی هر دنباله را بیابید.
- الف) $۰, ۰, ۰, \dots$ ب) $۸, ۶, \frac{۹}{۲}, \dots$ پ) $\sqrt{۳}, ۳, ۳\sqrt{۳}, \dots$ ت) $\frac{۷}{۴}, \frac{-۷}{۲}, ۷, \dots$
- ث) $۲, -۲, ۲, \dots$ ج) $۲, ۵, ۱۱, \dots$ چ) $\frac{۲}{۳}, ۱, ۳, ۷, \dots$
- * ۴۲- اگر یکی از جملات دنباله‌ی هندسی ۵ و جمله‌ی بعدی ۳- باشد، جمله‌ی قبل از ۵ و جمله‌ی بعد از ۳- را بنویسید.
- * ۴۳- اگر دو جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی به ترتیب ۶ و ۹ باشند، جمله‌ی چندم $\frac{۸۱}{۴}$ خواهد بود؟
- * ۴۴- اگر جمله‌ی پنجم یک دنباله‌ی هندسی ۱۸۹ و جمله‌ی سوم آن ۲۱ باشد، جمله‌ی هفتم آن را به دست آورید.
- * ۴۵- جمله‌ی پنجم یک دنباله‌ی هندسی $\frac{-۱}{۸۱}$ است. اگر قدر نسبت آن $\frac{-۱}{۳}$ باشد، جمله‌ی اول کدام است؟
- * ۴۶- در یک دنباله‌ی هندسی جمله‌ی سوم ۱- است. چه رابطه‌ی بین جمله‌ی دوم و چهارم برقرار است؟
- * ۴۷- در دنباله‌ی روبه‌رو X را طوری تعیین کنید تا این دنباله، یک دنباله‌ی هندسی شود.
 $1 - X, 2 + 2X, 1 + X$
- * ۴۸- در دنباله‌ی هندسی زیر Y چه عددی است؟ (راهنمایی: استفاده از تعمیم یافته‌ی واسطه‌ی هندسی) $1, X, Y, Z, 81$
- * ۴۹- اگر در یک دنباله‌ی هندسی $a_1 a_3 = ۳۲, a_1 a_5 = ۲$ باشد، $a_3 a_5$ آنگاه a_1 چند خواهد بود؟

۵۰- اگر دو دنباله‌ی زیر، هر دو دنباله‌هایی هندسی باشند، X و Y را بیابید.

$$2, y, x$$

$$y, x, 2$$

* ۵۱- به سه جمله‌ی دنباله‌ی زیر چه مقداری اضافه کنیم (یک مقدار ثابت) تا یک دنباله‌ی هندسی داشته باشیم؟

$$15, 9, 5, \dots$$

۵۲- اگر تمام جملات یک دنباله‌ی هندسی را به توان ۲ برسانیم، قدر نسبت چه تغییری می‌کند؟

۵۳- اگر تمام جملات یک دنباله‌ی هندسی را در عدد ثابت غیر صفر b ضرب کنیم، قدر نسبت چند برابر می‌شود؟

* ۵۴- تمام جملات یک دنباله‌ی هندسی را در عدد ۳ ضرب کرده و سپس تمام جملات را به توان ۲ می‌رسانیم.

واسطه هندسی جمله‌ی اول و سوم چه تغییری می‌کند؟

۵۵- هر سلول بعد از گذشت ۲ دقیقه تکثیر شده و به دو سلول تبدیل می‌شود. اگر ابتدا یک سلول داشته باشیم، بعد

از گذشت ۱۰ دقیقه چند سلول خواهیم داشت؟

۵۶- یک بانک تصمیم گرفته است به سرمایه‌مشتریان بانک خود سالانه ۲۰ درصد سود اختصاص دهد. فردی مبلغ

۳ میلیون تومان در این بانک پس‌انداز کرده است. بعد از گذشت چند سال سرمایه‌ی او به ۵ میلیون و ۱۸۴ هزار

تومان می‌رسد؟ (با فرض اینکه وی هر ماه سود پول خود را از بانک برداشته و نزد خود نگه دارد).

* ۵۷- یک کارگر هفته‌ای ۳۰۰۰ تومان حقوق می‌گیرد. کارفرما به او وعده داده که هر هفته به اندازه‌ی نصف حقوق

هفته‌ی قبل به دستمزد او اضافه می‌کند. بعد از ۳ هفته حقوق او چقدر خواهد بود؟

۵۸- در یک دنباله‌ی هندسی، مجموع جملات اول و دوم $\frac{9}{4}$ و مجموع جملات چهارم و پنجم ۳۶ می‌باشد. جمله‌ی

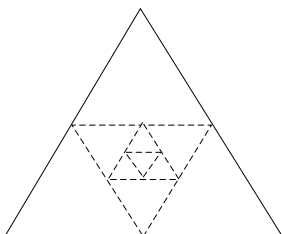
سوم تصاعد کدام است؟ (سراسری انسانی ۸۸)

۵۹- در یک تصاعد عددی، جملات سوم، هفتم و نهم، می‌توانند سه جمله‌ی متوالی از تصاعد هندسی باشند. چندین

جمله‌ی این تصاعد، صفر است؟ (سراسری تجربی ۸۸)

۶۰- اوساط مثلثی متساوی الاضلاع به مساحت 5 cm^2 را به هم وصل می‌کنیم و این کار را ۶ بار ادامه می‌دهیم،

مساحت ششمین مثلث را بیابید.



همگرایی و دنباله‌ی تقریبات اعشاری

۶۱- با تقسیم ۳ بر ۱۱ خارج قسمت‌های به دست آمده در هر مرحله را به صورت یک دنباله بنویسید. این دنباله به

چه عددی نزدیک می‌شود؟ چرا؟

۶۲- در مورد هر کدام از دنباله‌های زیر حدس بزنید هر دنباله به چه عددی نزدیک می‌شود، سپس حدس خود را با استفاده از دنباله‌ی تفاضل بیازمایید.

الف) $4/49, 4/499, 4/4999, \dots$

ب) $0/9, 0/99, 0/999, \dots$

پ) $3/03, 3/003, 3/0003, \dots$ *

* ۶۳- با استفاده از روش ۱۰ قسمت کردن واحدهای محور اعداد حقیقی دو جمله‌ی اول تقریبات اعشاری $\sqrt{7}$ را به دست آورید.

۶۴- دنباله‌های زیر آیا به عدد خاصی نزدیک می‌شوند؟

الف) $2, -2, 2, \dots$ ب) $4, 4, 4, \dots$ پ) $2, 7, 12, \dots$ ت) $13, 8, 3, \dots$

۶۵- اگر x عددی باشد که در نامعادلات زیر صدق می‌کند، چهار جمله‌ی اول دنباله‌ی تقریبات اعشاری آن را بنویسید.

$5/5632 < x + 3,$ $2x - 2 < 3/1266$

* ۶۶- اگر x عددی باشد که در نامعادلات زیر صدق می‌کند، چهار جمله‌ی اول دنباله‌ی تقریبات اعشاری آن را بنویسید.

$2x - 1 < 1/6844$

$x + 1 > 2/3421$

ریشه‌گیری اعداد حقیقی

۶۷- عبارت‌های زیر را ساده کنید:

الف) $\sqrt[3]{8}$ ب) $\sqrt[3]{(-2)^3}$ پ) $\sqrt{(-3)^2}$ ت) $\sqrt[4]{16}$

۶۸- عبارت‌های زیر را ساده کنید:

الف) $(\sqrt[3]{5} \sqrt[3]{7})^6$ ب) $(\sqrt[5]{\sqrt[3]{(-6)}})^{15}$ پ) $\sqrt[9]{8}$

توان رسانی با توان گویا

۶۹- عبارت‌های زیر را ساده کنید:

الف) $(8)^{\frac{1}{2}}$ ب) $(\sqrt{3})^{-\frac{3}{2}}$ پ) $(16)^{\frac{1}{3}}$ ت) $(\sqrt[3]{5})^{\frac{6}{5}}$

۷۰- ریشه‌گیری‌های زیر را بر حسب توان‌های گویا بنویسید:

الف) $\sqrt[3]{7} \times \sqrt{7}$ ب) $\sqrt[4]{9^3 \sqrt{3}}$ پ) $\sqrt[4]{\sqrt{5} \times \sqrt{15}}$ ت) $\sqrt[4]{16} \div \sqrt[5]{8}$

* ۷۱- در معادله‌ی زیر a را به دست آورید.

$\sqrt[a]{3\sqrt{3}} = 27$

پاسخ‌های الگو و دنباله

-۱

شماره‌ی شکل	۱	۲	۳	۴	۵
تعداد مثلث‌های کوچک	۱	۴	۹	۱۶	۲۵

(الف)

(ب) $(\text{شماره‌ی شکل})^2 = \text{تعداد مثلث‌های کوچک در هر شکل}$

برای دستیابی به این الگو از مساحت مثلث استفاده می‌کنیم. مساحت مثلث برابر حاصلضرب قاعده در ارتفاع آن تقسیم بر دو است. اگر قاعده n برابر و ارتفاع نیز n برابر شود، مساحت مثلث جدید n^2 برابر می‌شود.

$$S = \frac{A \cdot h}{2} \Rightarrow \begin{cases} A' = nA \\ h' = nh \end{cases} \Rightarrow S' = \frac{A' h'}{2} \Rightarrow S' = \frac{(nA)(nh)}{2} = \frac{(n^2) A \cdot h}{2} = (n^2) S$$

(پ) طبق این الگو مساحت شکل n ام، n^2 برابر مثلث واحد می‌شود و n^2 مثلث کوچک خواهیم داشت.

$$(20)^2 = 400$$

۳- با کمی دقت متوجه می‌شویم تعداد دایره‌های هر شکل برابر جمع شماره‌ی آن شکل با تعداد دایره‌های شکل قبل است. مثلاً شکل شماره‌ی ۳ دارای ۶ دایره است که حاصل جمع اعداد ۱، ۲، ۳ است. پس تعداد دایره‌های شکل n ام برابر جمع n با شماره‌های قبل از آن است. یعنی $1 + 2 + \dots + n$. این دنباله، به دنباله‌ی مثلثی معروف است و در

بحث بعدی خواهید دید مجموع اعداد فوق برابر $\frac{n(n+1)}{2}$ خواهد شد.

۴- (الف) $\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{9}{4}, \frac{16}{5}, \frac{25}{6}, \dots$ (ب) $-4, -7, -8, -7, -4, \dots$ (پ) $-2, 1, 4, 7, \dots$

۵- (الف) $\frac{3}{2}, 3, \frac{27}{8}, 3, \dots$ (ب) $\frac{1}{3}, \frac{1}{36}, \frac{1}{729}, \frac{1}{20736}, \dots$ (پ) $\frac{-1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{27}{13}, \frac{64}{27}, \dots$

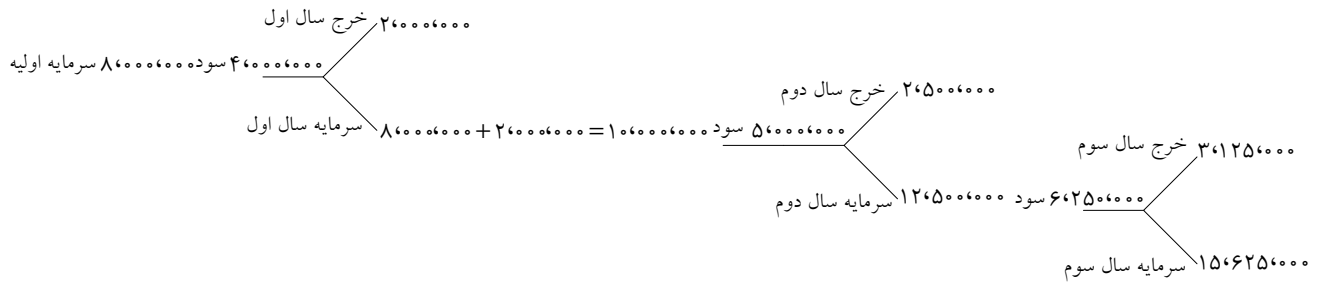
۷- (الف) $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots \rightarrow a_n = 2n$

(ب) $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots \rightarrow a_n = 2n - 1$

(پ) $3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, \dots \rightarrow a_n = 3^n$

۸- (الف) $12n - 7$ (ب) $\frac{n}{n+1}$ (پ) $\frac{n^2}{2n+1}$

-۱۰



۱۳- تعداد کل صفرهای لوزی، همان دنباله‌ی مربعی یعنی $1, 4, 9, 16, \dots$ می‌باشد پس کل صفرهای جمله‌ی یازدهم 11^2 یعنی ۱۲۱ است، ولی همانطور که مشاهده می‌کنیم در جملات فرد یعنی اول و سوم و پنجم و ... و یازدهم تعداد صفرهای توپر یکی بیشتر از تعداد صفرهای توخالی است، پس تعداد صفرهای توپر جمله‌ی یازدهم ۶۱ و تعداد صفرهای خالی برابر ۶۰ است.

$$\frac{n^2 - 5n + 1}{3n + 2} = \frac{1}{17} \rightarrow 17n^2 - 85n + 17 = 3n + 2 \quad -14$$

$$17n^2 - 88n + 15 = 0 \rightarrow$$

$$(17n - 3)(n - 5) = 0 \rightarrow \begin{cases} n = 5 \\ n = \frac{3}{17} \text{ غ ق} \end{cases}$$

بنابراین جمله‌ی پنجم دنباله برابر $\frac{1}{17}$ می‌باشد.

۱۵- این دنباله به نام دنباله‌ی فیبوناتچی مشهور است. $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$

۱۶- در دنباله‌های حسابی جمله‌ی دوم به اندازه‌ی d از جمله‌ی اول بیشتر است. پس اختلاف دو جمله‌ی اول d خواهد بود.
 $d = 12 - (-6) = 18$

$$a = -6$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \rightarrow a_n = (-6) + (n - 1) \times 18$$

فرمول کلی دنباله:

به n اعداد $3, 4, 5, 6$ را می‌دهیم و چهار جمله‌ی بعد را می‌یابیم.

روش دوم: کافی است برای پیدا کردن هر جمله‌ی تصاعد حسابی مقدار قدر نسبت یا d را به جمله‌ی قبل اضافه کنیم

و در این سوال قدر نسبت $d = 18$ می‌باشد. پس:

$$-6, 12, 30, 48, 66, 84, \dots$$

$\begin{matrix} \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright \\ +18 & +18 & +18 & +18 \end{matrix}$

$$y = \frac{13}{2} + d = \frac{16}{2} = 8$$

$$\frac{(13x + 3) + (3x - 7)}{2} = 5x + 7$$

۲۳- روش اول: (با استفاده از میانگین)

$$\Rightarrow \frac{16x - 4}{2} = 5x + 7 \Rightarrow 8x - 2 = 5x + 7 \rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3$$

روش دوم: (با استفاده از قدر نسبت)

چون اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی باید یکسان باشد پس اختلاف جملات اول و دوم با اختلاف جملات دوم و سوم باید برابر باشد پس: $(13x + 3) - (5x + 7) = (5x + 7) - (3x - 7) \Rightarrow 8x - 4 = 2x + 14 \Rightarrow 6x = 18 \Rightarrow x = 3$

۲۵-

جمله اول ۵ واسطه جمله هفتم

-۱۳, ○, ○, ○, ○, ○, ۱۱

$$\begin{cases} a_1 = -13 \\ a_7 = 11 = a + 6d \end{cases} \Rightarrow 6d = 24 \Rightarrow d = 4$$

این هفت جمله را به صورت یک دنباله در نظر گرفته و داریم:

حال کافی است d را به هر جمله اضافه کنیم تا جملات بعدی ظاهر شوند.

-۱۳, -۹, -۵, -۱, ۳, ۷, ۱۱

+۴ +۴ +۴ +۴ +۴

$$\begin{cases} a_3 = a + 2d = 33 \\ a_9 = a + 8d = 58 \end{cases} \Rightarrow 25 = 5d \Rightarrow d = 5$$

۲۶-

$$\Rightarrow d = 5, a_1 = 18 \Rightarrow a_n = 18 + (n-1)5$$

$$\left. \begin{cases} d' = d + 3 \\ a'_6 = a + (6-1)d' \end{cases} \right\} \Rightarrow a'_6 = a + 5(d+3) = \overbrace{a + 5d}^{a_6} + 15$$

۲۸-

می‌بینیم که به جمله‌ی ششم دنباله ۱۵ واحد افزوده می‌شود.

البته اگر دقت کنیم می‌بینیم دنباله‌ی جدید نیز یک دنباله‌ی حسابی خواهد بود به صورت:

$$a, a + d + 3, a + 2d + 6, \dots$$

$$-29 \quad \begin{array}{l} a, a+d, a+2d, \dots \\ \times 3 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{دنباله اولیه} \\ \text{دنباله ثانویه} \end{array} \right. : 3a, 3a+3d, 3a+6d, \dots \end{array}$$

اگر هر دو جمله‌ی متوالی از تصاعد دوم را از هم کسر کنیم، مشاهده می‌کنیم که مقدار $3d$ به دست می‌آید پس قدر نسبت تصاعد دوم 3 برابر قدر نسبت اول است به طور کلی هرگاه جملات یک تصاعد حسابی در k ضرب شوند، تصاعدی ظاهر می‌شود که قدر نسبت آن k برابر تصاعد اولیه است.

۳۱- در دنباله‌ی ساعات مطالعه هفتگی علی، $a_1 = 10$ و $d = 2$ و $a_n = 30$ است. پس داریم: $a_n = a + (n-1)d$
 $30 = 10 + 2(n-1) \Rightarrow 20 - 2(n-1) \Rightarrow n = 9$
 ساعات مطالعه‌ی علی در هفته‌ی نهم به 30 ساعت می‌رسد.

۳۲- در یک سال 100 نفر از روستا خارج شده و 25 نفر به آن وارد می‌شوند. پس در کل 75 نفر از روستا خارج می‌شوند (به عبارت دیگر قدر نسبت‌ها را با یکدیگر جمع جبری کرده و به عدد -75 رسیدیم. علت منفی بودن قدرت نسبت کاهش جمعیت روستا است.)
 $d = -75$

$$a_5 = 500 + (5-1) \times (-75)$$

$$a_5 = 500 - 300 = 200$$

بعد از 5 سال جمعیت این روستا 200 نفر خواهد بود.

۳۵- همان‌طور که می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه وتر بزرگترین ضلع است. (طبق رابطه‌ی فیثاغورس) پس دنباله را به صورت نزولی مرتب می‌کنیم:
 $10, 10-x, 10-2x \quad (x \geq 0)$
 و طبق رابطه‌ی فیثاغورس داریم:

$$(10)^2 = (10-x)^2 + (10-2x)^2$$

$$100 = 100 - 20x + x^2 - 40x + 4x^2 + 100 - 40x + 4x^2$$

$$5x^2 - 60x + 100 = 0$$

$$5(x^2 - 12x + 20) = 0 \rightarrow x^2 - 12x + 20 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} 10 \\ 2 \end{cases}$$

غیر قابل قبول چون اضلاع دیگر صفر $\rightarrow 10$
 یا منفی خواهند شد و معنی ندارند.

$$x = 2 \Rightarrow 10, 8, 6$$

۳۷- $a_m + a_n = a_p + a_q \rightarrow (a_1 + (m-1)d) + (a_1 + (n-1)d) = (a_1 + (p-1)d) + (a_1 + (q-1)d)$
 $md - d + nd - d = pd - d + qd - d \rightarrow md + nd = pd + qd$
 $\rightarrow m + n = p + q$

۳۸- جملات را $a, a+d$ و $a-d$ در نظر می‌گیریم و داریم:

$$\begin{cases} (a-d) + a + (a+d) \Rightarrow 3a = 0 \rightarrow a = 0 \\ (a-d)^2 + a^2 + (a+d)^2 = 18 \xrightarrow{a=0} (0-d)^2 + 0^2 + (0+d)^2 = 18 \end{cases}$$

$$\rightarrow d^2 + d^2 = 18 \rightarrow d^2 = 9 \rightarrow d = \pm 3$$

پس جملات عبارتند از $0-3, 0, 0+3$ یعنی $0-3, 0, 0+3$

-۶, ۸, ...

-۴۰

بین دو جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی، جمله‌ی دوم q برابر جمله‌ی اول خواهد بود. لذا داریم:

$$aq = a_p$$

$$(-6)q = 8 \Rightarrow q = \frac{-8}{6} = \frac{-4}{3}$$

برای به دست آوردن جمله‌ی بعدی کافی است q را در جمله‌ی قبلی ضرب کنیم.

$$-6, 8, -\frac{32}{3}, \frac{128}{9}, -\frac{512}{27}, \dots$$

۴۱- الف) می‌دانیم که ضرب هر عدد در صفر برابر صفر می‌شود. پس در این دنباله قدر نسبت هر عددی می‌تواند باشد و یک q مشخص نداریم. بنابراین این دنباله، یک دنباله‌ی هندسی نخواهد بود.

ب)

$$\begin{cases} a = 8 \\ a_p = 6 = aq \end{cases} \Rightarrow 8q = 6 \Rightarrow q = \frac{3}{4}$$

$$\begin{cases} a_p = \frac{9}{2} \\ a_p = 6 \end{cases} \Rightarrow a_p = a_p q \Rightarrow \frac{9}{2} = 6q \Rightarrow q = \frac{3}{4}$$

چون بین هر دو جمله‌ی دلخواه متوالی در این دنباله جمله‌ی دوم q برابر جمله‌ی اول است یک دنباله‌ی هندسی داریم.

$$a_n = a(q)^{n-1}$$

$$a_n = a \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1}$$

$$\begin{cases} a = \sqrt{3} \\ a_p = 3 = aq \end{cases} \Rightarrow 3 = \sqrt{3}q \Rightarrow q = \frac{3}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

پ)

$$\begin{cases} a_p = 3\sqrt{3} \\ a_p = 3 \end{cases} \Rightarrow a_p = a_p q \Rightarrow 3\sqrt{3} = 3q \Rightarrow q = \sqrt{3}$$

این دنباله نیز یک دنباله‌ی هندسی می‌باشد با قدرت نسبت $\sqrt{3}$ و جمله‌ی اول $\sqrt{3}$.

$$a_n = a_1(q)^{n-1} \rightarrow a_n = \sqrt{3}(\sqrt{3})^{n-1} \rightarrow a_n = (\sqrt{3})^n$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ a_r = -2 \end{cases} \Rightarrow -2 = 2q \Rightarrow q = -1 \quad (\text{ث})$$

$$\begin{cases} a_r = 2 \\ a_r = -2 \end{cases} \Rightarrow a_r = a_r q \Rightarrow 2 = -2q \Rightarrow q = -1$$

$$a_n = 2 \times (-1)^{n-1}$$

این دنباله هم یک دنباله‌ی هندسی است.

$$\begin{cases} a = 2 \\ a_r = 5 = aq \end{cases} \Rightarrow 5 = 2q \Rightarrow q = \frac{5}{2} \quad (\text{ج})$$

$$\begin{cases} a_r = 11 \\ a_r = 5 \end{cases} \Rightarrow a_r = a_r q \Rightarrow 11 = 5q \Rightarrow q = \frac{11}{5}$$

چون نسبت دو جمله‌ی دلخواه متوالی در این دنباله برابر نیست بنابراین، این دنباله یک دنباله‌ی هندسی نیست.

$$\begin{cases} a = 6 \\ a_r = aq = 9 \end{cases} \Rightarrow 9 = 6q \Rightarrow q = \frac{3}{2} \quad -43$$

$$\begin{cases} a_n = \frac{81}{4} \\ a_n = aq^{n-1} \end{cases} \Rightarrow \frac{81}{4} = 6\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \frac{27}{8} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \rightarrow n = 4$$

جمله‌ی چهارم $\frac{81}{4}$ خواهد بود.

$$\begin{cases} a_\delta = 189 \\ a_\delta = aq^r \end{cases}, \begin{cases} a_r = 21 \\ a_r = aq^r \end{cases} \Rightarrow \frac{a_\delta}{a_r} = q^r = \frac{189}{21} = 9 \Rightarrow q = \pm 3 \quad -44$$

$$\begin{cases} a_\gamma = aq^\delta \\ a_\delta = aq^r \end{cases} \Rightarrow \frac{a_\gamma}{a_\delta} = q^r = 9 \Rightarrow a_\gamma = 9a_\delta \rightarrow a_\gamma = 9(189) = 1701$$

روش دوم اینکه پس از یافتن q اول a را به دست آورده و سپس از روی الگوی دنباله جمله‌ی هفتم را بنویسیم.

$$\begin{cases} a_r = 21 = aq^r \\ q = 3 \end{cases} \Rightarrow 21 = 9a \Rightarrow a = \frac{7}{3}$$

$$a_\gamma = aq^6 = \frac{7}{3}(3)^6 = 1701$$

۴۶- در یک دنباله‌ی هندسی مربع یک جمله برابر حاصلضرب جمله‌ی قبل در جمله‌ی بعد از آن می‌باشد. (به جمله‌ی

وسط، واسطه‌ی هندسی دو جمله‌ی دیگر گفته می‌شود) و داریم:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{a_{n-1}} \rightarrow (a_n)^2 = a_{n-1} \times a_{n+1}$$

پس در این دنباله داریم:

$$(a_3)^2 = (a_2)(a_4) \Rightarrow (-1)^2 = a_2 a_4 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{a_4}$$

در نتیجه این دو جمله معکوس یکدیگر هستند.

۴۷- می‌توانیم از این قضیه استفاده کنیم که مربع جمله‌ی وسط برابر حاصلضرب جملات قبلی و بعدی است و یا

همان واسطه‌ی هندسی. لذا داریم:

$$(2+2x)^2 = (1+x)(1-x) \Rightarrow 4+4x^2+8x = 1-x^2$$

$$\Rightarrow 5x^2 + 8x + 3 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 4(5)(3) = 64 - 60 = 4 \rightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{4}}{10} = \begin{cases} -1 \\ -\frac{6}{10} \end{cases}$$

۴۹- طرفین تساوی را به هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{a_3 a_5}{a_1 a_7} = \frac{a_5}{a_1} = \frac{a_1 q^4}{a_1} = q^4 = \frac{32}{2} = (2)^4 \rightarrow q = \pm 2$$

$$a_1 a_7 = 2 \Rightarrow a_1 (a_1 q^6) = 2 \Rightarrow (a_1)^7 (\pm 2)^6 = 2 \Rightarrow a_1 = \pm \frac{\sqrt[7]{2}}{2}$$

۵۰- طبق قضیه واسطه‌ی هندسی داریم:

$$\begin{cases} y^2 = 2x \Rightarrow x = \frac{y^2}{2} \\ x^2 = 2y \Rightarrow \left(\frac{y^2}{2}\right)^2 = 2y \Rightarrow \frac{y^4}{4} = 2y \end{cases} \Rightarrow y = 0, \pm 2$$

$y = 0$ غیر قابل قبول است. برای اینکه در دنباله‌ی دوم، جمله‌ی سوم دنباله صفر نیست.

$y = -2$ نیز غیر قابل قبول است. زیرا در دنباله دوم جمله‌ی اول و سوم باید هم علامت باشند. پس $y = 2$.

$$\begin{cases} y = 2 \\ x^2 = 2y \end{cases} \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$x = -2$ غیر قابل قبول است. چون در دنباله‌ی اول جمله‌ی اول و سوم باید هم علامت باشند و چون جمله‌ی اول مثبت است پس x هم باید مثبت باشد.

* روش ساده این است که هرگاه مکان هر سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی تغییر کند هر سه جمله برابر بوده

و قدر نسبت این دنباله‌ی هندسی ۱ خواهد بود و $y = x = 2$.

۵۲- دنباله‌ی اولیه $a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}$

دنباله‌ی ثانویه $a^2, a^2q^2, a^2q^4, \dots, a^2q^{2n-2}$

همان‌طور که می‌بینیم اگر تمام جملات را به توان دو برسانیم هر جمله‌ی دنباله جدید q^2 برابر جمله‌ی قبل از خود است. بنابراین قدر نسبت نیز به توان ۲ می‌رسد.

۵۳- دنباله‌ی اولیه $a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}$

دنباله‌ی ثانویه $ab, aqb, aq^2b, \dots, aq^{n-1}b$

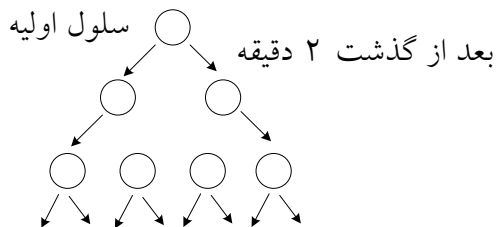
همان‌طور که می‌بینیم نسبت دو جمله‌ی دلخواه متوالی در دنباله‌ی جدید تغییر نمی‌کند بنابراین قدر نسبت نیز تغییری نمی‌کند.

$$1, 2, 4, 8, \dots \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ q = 2 \end{cases}$$

۵۵- با توجه به شکل و تشکیل دنباله داریم:

گذشت ۱۰ دقیقه به معنای جمله‌ی پنجم دنباله است. $(\frac{1}{2} = 5)$

جمله‌ی پنجم دنباله برابر ۱۶ است. $a_5 = aq^4 = 1 \times 2^4$



$$a_n = 5,184,000$$

۵۶- در این بانک هر سال سرمایه ضرب در $1/2$ می‌شود یعنی $q = 1/2$

$$a = 3,000,000$$

$$a_n = a_1 q^{n-1} \rightarrow 5,184,000 = 3,000,000 \cdot (1/2)^{n-1} \rightarrow$$

$$1/728 = (1/2)^{n-1} \rightarrow (1/2)^3 = (1/2)^{n-1} \rightarrow n-1 = 3 \rightarrow n = 4$$

یعنی جمله‌ی چهارم و در واقع یعنی در پایان ۳ سال و شروع سال چهارم سرمایه به ۵,۱۸۴,۰۰۰ تومان می‌رسد.

$$\begin{cases} a + a_4 = \frac{9}{2} \\ a_4 + a_8 = 36 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + aq = \frac{9}{2} \\ aq^3 + aq^4 = 36 \end{cases} \rightarrow \frac{aq^3 + aq^4}{a + aq} = \frac{36}{\frac{9}{2}}$$

$$\rightarrow \frac{q^3(a+aq)}{a+aq} = 8 \rightarrow q^3 = 8 \rightarrow q = 2$$

$$a + aq = \frac{9}{2} \rightarrow a + 2a = \frac{9}{2} \rightarrow a = \frac{3}{2} \Rightarrow a_3 = aq^2 = \frac{3}{2} \times (2)^2 \rightarrow a_3 = 6$$

$$(a_7)^2 = (a_3) \cdot (a_9) \rightarrow (a_1 + 6d)^2 = (a_1 + 2d)(a_1 + 8d) \quad -59$$

$$a_1^2 + 12a_1d + 36d^2 = a_1^2 + 10a_1d + 16d^2 \rightarrow 2a_1d = -20d^2 \rightarrow a_1 = -10d$$

$$a_n = 0 \rightarrow a_1 + (n-1)d = 0 \rightarrow -10d + (n-1)d = 0 \rightarrow$$

$$(n-1)d = 10d \rightarrow n = 11$$

جمله‌ی یازدهم برابر صفر است.

۶۰- مساحت‌های این مثلث‌ها با هم تشکیل دنباله‌ی هندسی با قدر نسبت $\frac{1}{4}$ را می‌دهند پس:

$$a_n = a\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \rightarrow a_6 = 5\left(\frac{1}{4}\right)^{6-1} = \frac{5}{1024}$$

$$0/2, 0/27, 0/272, 0/2727, \dots \quad -61$$

این دنباله به $\frac{3}{11}$ نزدیک می‌شود. جملات دنباله را از $\frac{3}{11}$ کسر می‌کنیم:

$$\frac{8}{110}, \frac{3}{1100}, \frac{8}{11000}, \dots$$

چون جملات دنباله‌ی تفاضل به صفر نزدیک می‌شود. بنابراین دنباله‌ی اصلی همگرا به $\frac{3}{11}$ است.

۶۲- الف) همگرا به $4/5$

$$0/01, 0/001, 0/0001, \dots$$

چون دنباله‌ی تفاضل به صفر همگرا است. بنابراین دنباله‌ی اصلی به $4/5$ همگرا است.

ب) همگرا به ۱

$$0/1, 0/01, 0/001, \dots$$

۶۴- الف) این دنباله در n امین جمله یا ۲ خواهد بود و یا ۲- و چون به عدد مشخصی نزدیک نمی‌شود لذا همگرا نیست.

ب) این دنباله که دنباله‌ی ثابت است به ۴ نزدیک می‌شود.

پ) این دنباله، که یک دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت ۵ است همواره افزایش یافته و به عدد خاصی نزدیک نمی‌شود.

ت) این دنباله یک دنباله‌ی حسابی با قدر نسبت (-۵) است. پس همواره کاهش یافته و همگرا نیست. (از هر عدد منفی کوچک‌تر می‌شود).

$$5/5632 < x + 3 \Rightarrow x > 2/5632$$

-۶۵

$$2x - 2 < 3/1266 \Rightarrow 2x < 5/1266 \Rightarrow x < 2/5632$$

۲/۵, ۲/۵۶, ۲/۵۶۳, ۲/۵۶۳۲
دنباله‌ی مورد نظر

$$\text{الف) } \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$$

$$\text{ب) } \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$$

-۶۷

$$\text{پ) } \sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3 \quad (\text{چون فرجه‌ی رادیکال زوج است})$$

$$\text{ت) } \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{4^2} = |4| = 4$$

$$\text{الف) } (\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{7})^6 = ((\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{7})^3)^2 = (5 \times 7)^2 = (35)^2$$

-۶۸

$$\text{ب) } (\sqrt[5]{\sqrt[3]{(-6)}})^{15} = ((\sqrt[5]{\sqrt[3]{(-6)}})^5)^3 = (\sqrt[3]{(-6)})^3 = -6$$

$$\text{پ) } \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{8}} = \sqrt[3]{2}$$

$$\text{الف) } (2 \times 4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \times \sqrt{4} = 2\sqrt{2}$$

-۶۹

$$\text{ب) } (\sqrt{3})^{-\frac{3}{2}} = (\sqrt{3^3})^{-\frac{1}{2}} = (\sqrt{3} \sqrt{9})^{-\frac{1}{2}} = (\sqrt{3}\sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{3}}$$

$$\text{الف) } \sqrt[3]{7} \times \sqrt{7} = 7^{\frac{1}{3}} \times 7^{\frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = 7^{\frac{5}{6}}$$

-۷۰

$$\text{ب) } \sqrt{9^3} \sqrt{3} = \sqrt{(3^2)(3^3)} = \sqrt{3^{2+3}} = \sqrt{3^5}$$

$$= 3^{\frac{5}{2}}$$